Approved For Release 2009/08/31 : CIA-RDP88-00904R000100130

9

Вторая Международная конференция
Организации Объединенных Наций
по применению атомной энергии
в мирных целях

A/CONF/15/P 2470
USSR
ORIGINAL: RUSSIAN

Не подлежит оглашению до официального сообщения на Конференции

STUDY OF NON-STATIONARY HEAT TRANSFER IN THE FUEL ELEMENTS OF NUCLEAR REACTORS

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

В.С.Ермаков, А.В.Иванов

Исследование температурного поля в тепловыделяющих элементах (ТВЭЛ) ядерного реактора представляет большой интерес по ряду причин. В первую очередь такое исследование дает возможность разработать методы расчета тепловой мощности активной зоны реактора и наметить наиболее рациональные пути отвода тепла. Затем знание температурного поля в общем виде (нестационарный режим) необходимо для расчета температурных напряжений, возникающих в ТВЭЛ, а, следовательно, для исследования структурно-механических характеристик ТВЭЛ.

Помимо таких чисто теплотехнических задач, исследование температурного поля в ТВЭЛ имеет актуальность в связи с тем, что существует взаимосвязь между источниками тепла в ТВЭЛ и стоками нейтронов (величина, характеризующая поглощение тепловых нейтронов). В этом случае исследование температурного поля в ТВЭЛ является дополнительным методом изучения процесса распространения и поглощения нейтронов в ТВЭЛ.

§ I. Постановка задачи

Как известно в большинстве случаев ТВЭЛ представляет собою цилиндрический многослойный стержень, в котором центральная часть является ядерным горючим (в ней происходит основное выделение тепла), а последующие слои служат ограждающей конструкцией. Широко применяется ТВЭЛ в форме многослойной пластины, которая по

2470

своим размерам может быть отнесена к неограниченной пластине (этот случай нами будет исследован наиболее подробно). Отвод тепла с поверхности ТВЭЛ происходит путем теплоотдачи к текущей жидкости или газу, что аналитически описывается граничными условиями третьего рода. Что касается теплообмена на границах соприкосновения между отдельными слоями ТВЭЛ, то они выражаются граничными условиями четвертого рода. Начальное распределение температуры, в общем случае, для каждого слоя может быть некоторой функцией координат. Таким образом, математически задача формулируется так: нужно решить $k+1$ дифференциальное уравнение

$$c_i \gamma_i \frac{\partial t_i}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda_i \nabla t_i) + W_i \; ; \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k) \qquad /1/$$

Здесь t_i и τ означают соответственно температуру и время; λ_i - коэффициент теплопроводности; c_i и γ_i - соответственно удельная теплоемкость и плотность. Индекс "i" обозначает номер слоя ТВЭЛ (центральная часть имеет индекс 0, первый слой I, второй 2 и т.д.). Удельная мощность источника тепла W (ккал/м^{3}час) пропорциональна величине стока нейтронов. Поэтому основной источник тепла действует в центральной части ТВЭЛ (W_0). В оболочках источники тепла значительно меньше ($W_1 \ll W_0$; $W_2 \ll W_0, \ldots$). Условия однозначности решения задачи /I/ сводятся к граничным условиям четвертого рода

$$t_{is} = t_{(i+1)s} \; ; \qquad \lambda_i (\nabla t_i)_s = \lambda_{i+1} (\nabla t_{i+1})_s \qquad /2/$$

на границах "s" соприкосновения отдельных составляющих слоев. К граничному условию третьего рода

$$\lambda_k (\nabla t_k)_s + \alpha (t_{ks} - t_a) = 0 \qquad /3/$$

на поверхности s наружного слоя ($i=k$). Здесь α - означает коэффициент теплообмена между поверхностью s наружного слоя ($i=k$) и окружающей средой, температура которой равна t_a. И к начальному условию

$$(t_i)_{\tau=0} = f_i(x, y, z). \qquad /4/$$

3416 - 152

Кроме того, если задача /I-4/ одномерная, то добавляется еще условие симметрии:

$$\left(\frac{\partial t_0}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \qquad (5)$$

Решение указанной задачи представляет известные трудности. Поэтому нами были разработаны два метода решения ее.

Сущность первого метода состоит в том, что $k+1$ дифференциальных уравнений /I/ заменяются одним дифференциальным уравнением, в котором теплообменные характеристики являются непрерывными функциями координат точек тела. Физически это обозначает, что многослойный ТВЭЛ заменяется однослойным, у которого теплоемкость C, плотность γ и коэффициент теплопроводности λ изменяются непрерывно с координатами. Такое приближение может привести к большим погрешностям в том случае, когда теплофизические характеристики составляющих ТВЭЛ тел сильно отличаются друг от друга. Однако анализ теплофизических характеристик материалов, из которых выполняются большинство ТВЭЛ, показывает, что такое упрощение постановки задачи с успехом может быть произведено с незначительной погрешностью. В этом случае скачкообразное изменение теплообменных характеристик (λ, c, γ) на границе соприкосновения отдельных слоев ТВЭЛ можно заменить непрерывными функциями координат.

3416-150

Во втором методе для решения совокупности дифференциальных уравнений теплопроводности применяется операционное исчисление. При этом приходится вводить, в области изображений по Лапласу, некоторую обобщенную функцию Грина. Если первый метод дает решение рассматриваемой задачи в виде ряда, то второй метод дает решение этой же задачи в интегральной форме. Первым методом удобно пользоваться в том случае, когда мы имеем большое число слоев, а вторым методом в том случае, когда мы имеем дело с двумя-тремя слоями. Таким образом, оба метода дополняют друг друга.

Рассмотрим сначала первый метод решения задачи.

§ 2. Решение задачи теплопроводности с переменными теплофизическими характеристиками

Для одномерной симметричной задачи (ТВЭЛ в форме многослойной неограниченной пластины) дифференциальные уравнения и условия однозначности имеют вид:

$$c_i \gamma_i \frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda_i \frac{\partial^2 t_i}{\partial x^2} + W_i(x,\tau); \qquad i = 0,1,2,\ldots,k; \qquad /6/$$

$$t_{is} = t_{(i+1)s}; \qquad \lambda_i \left(\frac{\partial t_i}{\partial x}\right)_s = \lambda_{i+1}\left(\frac{\partial t_{i+1}}{\partial x}\right)_s; \qquad /7/$$

$$\lambda_k \left(\frac{\partial t_k}{\partial x}\right)_s + \alpha(t_{ks} - t_a) = 0; \qquad /8/$$

$$(t_i)_{\tau=0} = f_i(x). \qquad /9/$$

Предполагается, что коэффициент теплопроводности λ_i в каждом слое ТВЭЛ является величиной постоянной. Заменим $k+1$ дифференциальных уравнений /6/ одним дифференциальным уравнением с переменными теплофизическими характеристиками $\lambda(x)$, $c(x)$ и $\gamma(x)$:

$$c(x)\gamma(x)\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\right] + W(x,\tau). \qquad /10/$$

При этом граничные условия четвертого рода /7/ выпадают. Остается условие /8/, которое теперь можно записать в виде:

$$\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=l} + \alpha\left[t\big|_{x=l} - t_a\right] = 0, \qquad /11/$$

и начальное условие и условие симметрии в виде:

$$t\big|_{\tau=0} = f(x); \qquad \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0. \qquad /12/$$

Здесь l означает половину толщины пластины.

В случае несимметричной задачи (теплообмен на противоположных поверхностях пластины происходит с различной интенсивностью) условия /11/ и /12/ заменяются условиями:

$$\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \alpha_1 t\bigg|_{x=0} = \varphi_1(\tau)\ ; \qquad /13/$$

$$\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=\ell} + \alpha_2 t\bigg|_{x=\ell} = \varphi_2(\tau)\ ; \qquad /14/$$

$$t\big|_{\tau=0} = f(x). \qquad /15/$$

Для общности задачи мы предполагаем, что температура окружающей среды является функцией времени $t_a(\tau)$, т.е.

$$\alpha_1 t_a(\tau) = \varphi_1(\tau); \qquad \alpha_2 t_a(\tau) = \varphi_2(\tau)\,. \qquad /16/$$

Наконец, можно сделать еще одно обобщение, не усложняющее метода решения задачи. Введем сток тепла, пропорциональный температуре $\beta(x)t$ считая, что коэффициент пропорциональности $\beta(x)$ является функцией координаты x. Тогда вместо дифференциального уравнения /10/ мы получим более сложное уравнение:

3416-150

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{\ell(x)} L(t) + F(x,\tau); \qquad F(x,\tau) = \frac{W(x,\tau)}{c(x)\gamma(x)}, \qquad /17/$$

где

$$L(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\right] - \beta(x)t, \qquad /18/$$

а $C(x) = c(x)\gamma(x)$ обозначает объемную теплоемкость ТВЭЛ. Таким образом, в результате всех обобщений мы пришли к дифференциальному уравнению /17/ и условию однозначности /13-15/.

Для того, чтобы получить решение дифференциального уравнения /17/ при условиях однозначности /13-15/, воспользуемся конечным интегральным преобразованием вида:

$$\bar{t}(\mu_n,\tau) = \int_0^{\ell} C(x)\,K(x,\mu_n)\,t(x,\tau)\,dx\,. \qquad /19/$$

Особенность предлагаемого метода заключается в том, что мы показываем, каким образом можно найти в явной форме ядро интегрального преобразования $K(x,\mu_n)$. Для того, чтобы найти ядро $K(x,\mu_n)$ рассмотрим вспомогательную задачу Штурма-Лиувилля:

$$L(K) + \mu C(x) K = 0 \; ; \qquad /20/$$

$$\lambda(x) \frac{dK}{dx}\Big|_{x=0} + \alpha_1 K\Big|_{x=0} = 0 \; ; \qquad /21/$$

$$\alpha(x) \frac{dK}{dx}\Big|_{x=\ell} + \alpha_2 K\Big|_{x=\ell} = 0 . \qquad /22/$$

Найдем общий интеграл дифференциального уравнения /20/, которое в развернутой записи имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial K}{\partial x}\right] + \left[\mu C(x) - \mu(x)\right] K = 0 . \qquad /23/$$

С этой целью введем обозначение

$$AK = \frac{1}{\mu C(x) - \beta(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial K}{\partial x}\right] \qquad /24/$$

и перепишем уравнение /23/ в виде:

$$AK + K = 0 . \qquad /25/$$

Рассмотрим два линейно-независимых интеграла уравнения $AK = 0$:

$$K^{[1]} = 1 \; ; \qquad K^{[2]} = \int \frac{dx}{\lambda(x)} . \qquad /26/$$

Составим из них равное нулю выражение:

$$C_1 A K^{[1]} + C_2 A K^{[2]} \qquad /27/$$

и присоединим /27/ к левой части уравнения /25/. Получим:

$$AK - C_1 A K^{[1]} - C_2 A K^{[2]} + K = 0 , \qquad /28/$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Решая /28/ относительно K, получим общий интеграл дифференциального уравнения /23/:

$$K = C_1 (1 + A^{-1})^{-1} K^{[1]} + C_2 (1 + A^{-1})^{-1} K^{[2]} . \qquad /29/$$

Действительно, выражение /29/ является суммой двух слагаемых

$$K(x, \mu) = C_1 K_1(x, \mu) + C_2 K_2(x, \mu) , \qquad /30/$$

Причем $K_1(x, \mu)$ и $K_2(x, \mu)$ представляют собою бесконечные ряды:

$$K_1(x, \mu) = (1 + A^{-1})^{-1} K^{[1]} = \left(1 - \frac{1}{A} + \frac{1}{A^2} - \frac{1}{A^3} + \cdots\right) \cdot 1 =$$

$$= 1 - \int \frac{dx}{\lambda(x)} \int \left[\mu C(x) - \beta(x)\right] dx +$$

$$+ \int \frac{dx}{\lambda(x)} \int \left[\mu C(x) - \beta(x)\right] dx \int \frac{dx}{\lambda(x)} \int \left[\mu C(x) - \beta(x)\right] dx - \cdots \qquad /31/$$

.3416-150

$$K_2(x, \mu) = (1 + A^{-1})^{-1} K^{[2]} = \left(1 - \frac{1}{A} + \frac{1}{A^2} - \frac{1}{A^3} + \cdots\right) K^{[2]} =$$

$$= \int \frac{dx}{\lambda(x)} - \int \frac{dx}{\lambda(x)} \int \left[\mu C(x) - \beta(x)\right] dx \int \frac{dx}{\lambda(x)} +$$

$$+ \int \frac{dx}{\lambda(x)} \int \left[\mu C(x) - \beta(x)\right] dx \int \frac{dx}{\lambda(x)} \int \left[\mu C(x) - \beta(x)\right] dx \int \frac{dx}{\lambda(x)} - \cdots \qquad /32/$$

Ряды /3I/ и /32/ удовлетворяют уравнению /23/. Поэтому выражение /30/ является общим интегралом дифференциального уравнения /23/, а ряды /3I/ и /32/ его линейно-независимые частные интегралы. Подставив выражение /30/ с учетом /3I/ и /32/ в граничные условия /2I/, /22/, получим два линейных однородных уравнения относительно произвольных постоянных C_1 и C_2 :

$$C_1\left[\lambda(0)K_1'(0,\mu)+\alpha_1K_1(0,\mu)\right]+C_2\left[\lambda(0)K_2'(0,\mu)+\alpha_1K_2(0,\mu)\right]=0$$

$$C_1\left[\lambda(\ell)K_1'(\ell,\mu)+\alpha_2K_1(\ell,\mu)\right]+C_2\left[\lambda(\ell)K_2'(\ell,\mu)+\alpha_2K_2(\ell,\mu)\right]=0 \qquad /33/$$

Для того, чтобы полученная таким образом система уравнений допускала для произвольных постоянных C_1 и C_2 решения, отличные от нуля, необходимо, чтобы определитель $\Delta(\mu)$, составленный из коэффициентов, стоящих при этих величинах, был равен нулю.

$$\Delta(\mu)=\begin{vmatrix}\lambda(0)K_1'(0,\mu)+\alpha_1K_1(0,\mu), & \lambda(0)K_2'(0,\mu)+\alpha_1K_2(0,\mu)\\ \lambda(\ell)K_1'(\ell,\mu)+\alpha_2K_1(\ell,\mu), & \lambda(\ell)K_2'(\ell,\mu)+\alpha_2K_2(\ell,\mu)\end{vmatrix}=0 \qquad /34/$$

Мы получили в явной форме трансцендентное уравнение /34/ для определения собственных чисел задачи /20-22/. Обозначим корни уравнения /34/ через $\mu=\mu_n$. Подставив $\mu=\mu_n$ в первое уравнение /33/ и решая его относительно C_1, получим:

$$C_1=-C_2\frac{\lambda(0)K_2'(0,\mu)+\alpha_1K_2(0,\mu)}{\lambda(0)K_1'(0,\mu)+\alpha_1K_1(0,\mu)}\,. \qquad /35/$$

После этого, подставив /35/ и $\mu=\mu_n$ в /30/ и отбрасывая постоянный множитель, получим:

$$K(x,\mu_n)=\begin{vmatrix}\lambda(0)K_1'(0,\mu_n)+\alpha_1K_1(0,\mu_n), & \lambda(0)K_2'(0,\mu_n)+\alpha_1K_2(0,\mu_n)\\ K_1(x,\mu_n) & K_2(x,\mu_n)\end{vmatrix} \qquad /36/$$

Это и есть явное выражение для ядра $K(x,\mu_n)$ интегрального преобразования /19/. Функция $K(x,\mu_n)$ удовлетворяет при $\mu=\mu_n$ уравнению /20/ и граничным условиям /21-22/.

Как известно, собственные функции задачи Штурма-Лиувилля /20-22/ ортогональны на промежутке $(0,\ell)$ с весом $C(x)$. В связи с этим функ[illegible]ить относительно x в ряд

по собственным функциям задачи /20-22/.

$$t(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_0^{\ell}C(x)K(x,\mu_n)t(x,\tau)dx}{\int_0^{\ell}C(x)K^2(x,\mu_n)dx}K(x,\mu_n) \qquad /36^a/$$

Подставив сюда /I9/ получим :

$$t(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar t(\mu_n,\tau)}{\int_0^{\ell}C(x)K^2(x,\mu_n)\,dx}K(x,\mu_n). \qquad /37/$$

Формула /37/ является формулой обращения для интегрального преобразования /I9/.

Применим интегральное преобразование /I9/ к решению задачи /I7/, /I3-I5/. Прежде всего перейдем в заданном дифференциальном уравнении /I7/ к изображениям относительно x . С этой целью умножим обе части уравнения /I7/ на $C(x)K(x,\mu_n)$ и результат проинтегрируем по x в пределах от 0 до ℓ . Получим:

3416-150

$$\int_0^{\ell}C(x)K(x,\mu_n)\frac{\partial t}{\partial\tau}dx=\int_0^{\ell}C(x)K(x,\mu_n)\left[\frac{1}{C(x)}L(t)\right]dx+\int_0^{\ell}C(x)K(x,\mu_n)F(x,\tau)dx \qquad /38/$$

Выполним дважды в первом слагаемом правой части интегрирование по частям. Учитывая уравнение /20/ при $\mu=\mu_n$ для $K(x,\mu_n)$ и условия /2I/ и /22/ , получим:

$$\int_0^{\ell}C(x)K(x,\mu_n)\left[\frac{1}{C(x)}L(t)\right]dx=-\mu_n\bar t(\mu_n,\tau)+K(\ell,\mu_n)\varphi_2(\tau)-K(0,\mu_n)\varphi_1(\tau). \qquad /39/$$

Теперь заметим, что

$$\int_0^{\ell}C(x)K(x,\mu_n)\frac{\partial t}{\partial\tau}dx=\frac{d\bar t(\mu_n,\tau)}{d\tau}; \qquad /40/$$

$$\int_0^{\ell}C(x)K(x,\mu_n)F(x,\tau)dx=\bar F(\mu_n,\tau). \qquad /41/$$

Подставив /39-4I/ в /38/, получим:

$$\frac{d\bar t}{d\tau}=-\mu_n\bar t+\varphi(\tau), \qquad /42/$$

где

$$\Phi(\tau)=K(\ell,\mu_n)\varphi_2(\tau)-K(0,\mu_n)\varphi_1(\tau)+\bar{F}(\mu_n,\tau). \qquad /43/$$

Итак, переходя при помощи интегрального преобразования /I9/ к изображениям относительно x в уравнении /I7/, мы получим вместо дифференциального уравнения в частных производных /I7/ обыкновенное дифференциальное уравнение /42/, включающее в себя заданные граничные условия третьего рода /I3-I4/.

Начальное условие для уравнения /42/ мы получим, переходя в заданном начальном условии /I5/ к изображениям:

$$\left\{\bar{t}(\mu_n,\tau)\right\}_{\tau=0}=\bar{f}(\mu_n)=\int_0^\ell C(x)K(x,\mu_n)f(x)\,dx. \qquad /44/$$

Решение уравнения /42/ при условии /44/ имеет вид:

$$\bar{t}(\mu_n,\tau)=\bar{f}(\mu_n)e^{-\mu_n\tau}+\int_0^\tau e^{-\mu_n(\tau-\theta)}\Phi(\theta)\,d\theta, \qquad /45/$$

где $\bar{f}(\mu_n)$ - изображение начального распределения температуры $f(x)$. Переходя от выражения /45/ к оригиналу при помощи формулы обращения /37/, получим окончательное решение нашей задачи в виде:

$$t(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K(x,\mu_n)}{\int_0^\ell C(x)K^2(x,\mu_n)\,dx}\left\{e^{-\mu_n\tau}\int_0^\ell C(x)K(x,\mu_n)f(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^\tau e^{-\mu_n(\tau-\theta)}\left[\int_0^\ell C(x)K(x,\mu_n)F(x,\theta)\,dx+K(\ell,\mu_n)\varphi_2(\theta)-K(0,\mu_n)\varphi_1(\theta)\right]d\theta\right\}. \qquad /46/$$

Рассмотренный метод решения уравнения теплопроводности с переменными теплофизическими характеристиками можно распространить на ТВЭЛ в форме неограниченного цилиндра. В этом случае дифференциальное уравнение теплопроводности имеет вид:

$$c(x)\gamma(r)\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda(r) r \frac{\partial t}{\partial r}\right] + W(r,\tau).$$

Обозначая

$$L(t) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda(r) r \frac{\partial t}{\partial r}\right],$$

мы получим:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r c(r)\gamma(r)} L(t) + F(r,\tau); \qquad F(r,\tau) = \frac{W(r,\tau)}{c(r)\gamma(r)},$$

т.е. уравнение, уже рассмотренного вида /I7/.

Если использовать не одно, а два интегральных преобразования, то тогда можно получить решение задачи теплопроводности с переменными теплофизическими характеристиками и для цилиндра конечных размеров. Многомерные задачи теплопроводности решаются аналогичным образом, но при этом, конечно, редко удается находить ядро соответствующего интегрального преобразования в явном виде.

3416 – 150

§ 3. Нестационарное температурное поле ТВЭЛ

В качестве конкретного примера рассмотрим тот случай, когда

$$\lambda(x) = \lambda_0 e^{bx}; \quad c(x) = c_0 e^{b_1 x}; \quad \beta(x) = 0; \qquad (b > b_1).$$

В этом случае согласно /3I/ и /32/ мы находим:

$$K_1(x,\mu) = 1 - \frac{\mu c_0}{\lambda_0}\int e^{-bx}dx\int e^{b_1 x}dx + \left(\frac{\mu c_0}{\lambda_0}\right)^2\int e^{-bx}dx\int e^{b_1 x}dx\int e^{-bx}dx\int e^{b_1 x}dx - \dots$$

$$K_2(x,\mu) = \frac{1}{\lambda_0}\int e^{-bx}dx - \frac{\mu c_0}{\lambda_0^2}\int e^{-bx}dx\int e^{b_1 x}dx\int e^{-bx}dx + \dots$$

или, вычислив интегралы получаем:

$$K_1(x,\mu) = 1 - \frac{\mu c_0}{\lambda_0}\frac{1}{b_1(b_1-b)}e^{-(b-b_1)x} + \left(\frac{\mu c_0}{\lambda_0}\right)\frac{1}{2b_1(b_1-b)^2(2b_1-b)}e^{-2(b-b_1)x} -$$

$$K_2(x,\mu) = -\frac{1}{\lambda_0 b} e^{-bx} + \frac{\mu c_0}{\lambda_0^2 b(b_1 - b)(b_1 - 2b)} e^{-(2b-b_1)x} - \ldots$$

После этого решение задачи при условиях /I3-I5/ получим по формуле /46/, в которой μ_n являются корнями трансцендентного уравнения /34/, а функция $K(x,\mu_n)$ определяется выражением /36/.

Расчет тепловыделяющих элементов при постоянных теплофизически характеристиках сводится к решению уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + F(x,\tau); \qquad F(x,\tau) = \frac{W(x,\tau)}{c\gamma}$$

при граничных условиях

$$\left\{\frac{\partial t}{\partial x}\right\}_{x=0} = 0; \qquad \frac{\partial t}{\partial x} + Hu\Big|_{x=\ell} = \psi(\tau),$$

где

$$H = \frac{\alpha}{\lambda} = \text{const.} \qquad \text{и} \quad \psi(\tau) = \frac{\alpha}{\lambda} t_a,$$

и начальном условии

$$t\Big|_{\tau=0} = \psi(x)$$

В данном случае метод, изложенный в § 2, приводит к формулам обращения:

$$\bar{t}(\mu_n,\tau) = \int_0^\ell t(x,\tau)\cos\sqrt{\mu_n}\,x\,dx$$

$$t(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(\mu_n + H^2)}{\ell(\mu_n + H^2) + H}\,\bar{t}(\mu_n,\tau)\cos\sqrt{\mu_n}\,x,$$

где $\mu = \mu_n$ - корни уравнения

$$\operatorname{tg}\sqrt{\mu}\,\ell = \frac{H}{\sqrt{\mu}}$$

Используя эти формулы, мы получим решение только что сформулированной задачи в виде:

$$t(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\mu_n+H^2)}{\ell(\mu_n+H^2)+H}\cos\sqrt{\mu_n}\,x\left\{e^{-a\mu_n\tau}\int_0^{\ell}\psi(x)\cos\sqrt{\mu_n}\,x\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\tau}e^{-a\mu_n(\tau-\theta)}\left[\int_0^{\ell}f(x,\theta)\cos\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx+a\varphi(\theta)\cos\sqrt{\lambda_n}\,\ell\right]d\theta\right\}.$$

Если, в частности, начальная температура ТВЭЛ постоянная $t|_{\tau=0}=t_0$, температура охладителя тоже постоянная $\varphi(\tau)=t_\ell=\frac{\alpha}{\lambda}t_a$, а удельная мощность источника тепла изменится по закону:

$$F(x,\tau)=\frac{W}{c\gamma}=A\sin B\tau\cos Dx,$$

то в этом случае мы получим

$$t(x,\tau)=t_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(\mu_n+H^2)\cos\sqrt{\mu_n}\,x}{\ell(\mu_n+H^2)+H}\left\{\frac{A(a\mu\sin B\tau-B\cos B\tau+Be^{-a\mu_n\tau})}{a^2\mu_n^2+B^2}\right.\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\frac{\sin(D+\sqrt{\mu_n})\ell}{2(D+\sqrt{\mu_n})}+\frac{\sin(D-\sqrt{\mu_n})\ell}{2(D-\sqrt{\mu_n})}\right]+\frac{(t_\ell-Ht_0)\cos\sqrt{\mu_n}\,\ell}{\mu_n}\left(1-e^{-a\mu_n\tau}\right)\right\},$$

где μ_n - корни указанного выше характеристического уравнения, H — относительный коэффициент теплообмена и a - коэффициент температуропроводности.

3416-150

§ 4. Решение задач теплопроводности в интегральной форме при помощи преобразования Лапласа

Как и в § 2, рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводно-

сти, которое мы теперь запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\right]-C(x)\frac{\partial t}{\partial \tau}-\beta(x)t=-W(x,\tau), \qquad /47/$$

при неоднородных граничных условиях

$$\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=0}+\alpha_1 t\bigg|_{x=0}=\varphi_1(\tau)\ ; \qquad /48/$$

$$\lambda(x)\frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=\ell}+\alpha_2 t\bigg|_{x=\ell}=\varphi_2(\tau) \qquad /49/$$

и начальном условии

$$t(x,\tau)\Big|_{\tau=0}=f(x). \qquad /50/$$

Решение задачи будем искать в виде суммы двух функций

$$t(x,\tau)=t_1(x,\tau)+t_2(x,\tau). \qquad /51/$$

Потребуем, чтобы первая функция $t_1(x,\tau)$ удовлетворяла однородному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial t_1}{\partial x}\right]-C(x)\frac{\partial t_1}{\partial \tau}-\beta(x)t_1=0, \qquad /52/$$

неоднородным граничным условиям

$$\lambda(x)\frac{\partial t_1}{\partial x}\bigg|_{x=0}+\alpha_1 t_1\Big|_{x=0}=\varphi_1(\tau); \qquad /53/$$

$$\lambda(x)\frac{\partial t_1}{\partial x}\bigg|_{x=\ell}+\alpha_2 t_1\Big|_{x=\ell}=\varphi_2(\tau) \qquad /54/$$

и нулевому начальному условию

$$t_1(x,\tau)\Big|_{\tau=0}=0\ , \qquad /55/$$

а вторая функция $t_2(x,\tau)$ удовлетворяла неоднородному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial t_2}{\partial x}\right] - C(x)\frac{\partial t_2}{\partial \tau} - \beta(x) t_2 = -W(x,\tau) \qquad /56/$$

и однородным граничным условиям

$$\lambda(x)\frac{\partial t_2}{\partial x}\bigg|_{x=0} + \alpha_1 t_2\Big|_{x=0} = 0\ ; \qquad /57/$$

$$\lambda(x)\frac{\partial t_2}{\partial x}\bigg|_{x=\ell} + \alpha_2 t_2\Big|_{x=\ell} = 0, \qquad /58/$$

и начальному условию

$$t_2(x,\tau)_{\tau=0} = f(x). \qquad /59/$$

3416-150

При соблюдении условий /52-59/ для функций t_1 и t_2 выражение /5I/ будет удовлетворять всем условиям задачи /47-50/. Таким образом, первоначальная задача /47-50/ разбивается на две вспомогательные задачи /52-55/ и /56-59/.

Переходя в выражениях /52-55/ к изображениям по Лапласу относительно переменной τ, мы получим вместо /52/ обыкновенное дифференциальное уравнение для изображения $\bar{t}_1(x,p)$ искомой функции $t_1(x,\tau)$:

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(x)\frac{d\bar{t}_1}{dx}\right] - \left[pC(x) + \beta(x)\right]\bar{t}_1(x,p) = 0, \qquad /60/$$

включающее в себя начальное условие /55/ и соответствующие граничные условия

$$\lambda(x)\frac{d\bar{t}_1}{dx}\bigg|_{x=0} + \alpha_1 \bar{t}_1\Big|_{x=0} = \bar{\varphi}_1(p)\ ; \qquad /61/$$

$$\lambda(x)\frac{d\bar{t}_1}{dx}\bigg|_{x=\ell} + \alpha_2 \bar{t}_1\Big|_{x=\ell} = \bar{\varphi}_2(p). \qquad /62/$$

Если

$$t_1^{[1]}(x,p)\ ; \qquad t_1^{[2]}(x,p)$$

два каких-нибудь линейно-независимых частных интеграла уравнения /60/ (эти интегралы можно найти, применяя способ, указанный в § 2), то общий интеграл этого уравнения можно записать в виде:

$$\bar{t}_1(x,p) = C_1(p)\,t_1^{[1]}(x,p) + C_2(p)\,t_1^{[2]}(x,p). \qquad /63/$$

Подставив /63/ в /61-62/, получим систему двух линейных уравнений относительно двух неизвестных $C_1(p)$ и $C_2(p)$. Решив эту систему, найдем $C_1(p)$ и $C_2(p)$. После этого, переходя от /63/ к оригиналу, получим решение первой вспомогательной задачи и таким образом найдем функцию $t_1(x,\tau)$.

Переходя в выражениях /56-59/ к изображениям по Лапласу относительно переменной τ, получим вместо /56/ и /59/ обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение для $\bar{t}_2(x,p)$:

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(x)\frac{d\bar{t}_2}{dx}\right] - \left[pC(x)+\beta(x)\right]\bar{t}_2(x,p) = -\bar{F}(x,p), \qquad /64/$$

где

$$-\bar{F}(x,p) = -\bar{W}(x,p) - C(x)\varphi(x), \qquad /65/$$

и соответствующие однородные граничные условия:

$$\lambda(x)\frac{d\bar{t}_2}{dx}\bigg|_{x=0} + \alpha_1\bar{t}_2\bigg|_{x=0} = 0\ ; \qquad /66/$$

$$\lambda(x)\frac{d\bar{t}_2}{dx}\bigg|_{x=l} + \alpha_2\bar{t}_2\bigg|_{x=l} = 0. \qquad /67/$$

Решение обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения /64/ при однородных граничных условиях /66-67/ целесообразно представить в интегральной форме:

$$\bar{t}_2(x,p) = \int_0^{\ell} \bar{R}(x,\xi,p)\bar{F}(\xi,p)d\xi . \qquad /68/$$

Здесь функция Грина

$$\bar{R}(x,\xi,p) = \begin{cases} \bar{R}_1(x,\xi,p); & (\xi \leqslant x) \\ \bar{R}_2(x,\xi,p); & (\xi \geqslant x) \end{cases} \qquad /69/$$

определяется при помощи следующих шести условий:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial \bar{R}_i}{\partial x}\right] - \left[pC(x) + \beta(x)\right]\bar{R}_i = 0 \qquad (i-1,2); \qquad /70/$$

$$\bar{R}_1(x,\xi,p)_{\xi=x} - \bar{R}_2(x,\xi,p)_{\xi=x} = 0 ; \qquad /71/$$

$$\left.\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial x}\right|_{\xi=x} - \left.\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial x}\right|_{\xi=x} = -\frac{1}{\lambda(x)} ; \qquad /72/$$

$$\lambda(x)\left.\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial x}\right|_{x=0} + \alpha_1 \bar{R}_2\Big|_{x=0} = 0 ; \qquad /73/$$

$$\lambda(x)\left.\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial x}\right|_{x=\ell} + \alpha_2 \bar{R}_1\Big|_{x=\ell} = 0 . \qquad /74/$$

Так как общие интегралы двух уравнений /70/ содержат четыре произвольные постоянные, то последние четыре условия /7I-74/ позволяют определить эти постоянные и построить, таким образом, функцию Грина. Переходя к оригиналу от выражения /68/

$$\bar{t}_2(x,p) = \int_0^{\ell} \bar{R}(x,\xi,p)\bar{F}(\xi,p)d\xi - \int_0^{\ell} \bar{R}(x,\xi,p)C(\xi)f(\xi)d\xi + \int_0^{\ell} \bar{R}(x,\xi,p)\bar{W}(\xi,p)d\xi, \qquad /75/$$

3416-150

получим решение второй вспомогательной задачи в виде:

$$t_2(x,\tau) = \int_0^{\ell} R(x,\xi,\tau)C(\xi)f(\xi)d\xi + \int_0^{\ell} d\xi \int_0^{\tau} R(x,\xi,\theta)W(\xi,\tau-\theta)d\theta, \qquad /76/$$

где

$$R(x,\xi,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p\tau}\,\bar{R}(x,\xi,p)dp. \qquad /77/$$

Различные способы вычисления интеграла /77/ позволяют получать в различных формах решение второй вспомогательной задачи, что очень важно для техники расчета.

§ 5. Нестационарное температурное поле плоского двухслойного и трехслойного ТВЭЛ

Решение задач теплопроводности для многослойных тел можно получить либо при помощи метода собственных функций, либо при помощи операционного исчисления. В последнем случае оказывается необходимым соответствующее обобщение функции Грина в области изображений по Лапласу. Рассмотрим следующую задачу. Требуется найти решение дифференциальных уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial t_1}{\partial\tau} = a_1\frac{\partial t_1}{\partial x^2} + F_1(x,\tau); \qquad (0 \leqslant x \leqslant h;\ \ \tau > 0); \qquad /78/$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial\tau} = a_2\frac{\partial t_2}{\partial x^2} + F_2(x,\tau); \qquad (h \leqslant x \leqslant \ell;\ \ \tau > 0) \qquad /79/$$

при однородных граничных условиях

$$\lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial x}\Big|_{x=0} + \alpha_1 t_1\Big|_{x=0} = 0; \qquad /80/$$

$$\lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial x}\Big|_{x=\ell} + \alpha_2 t_2\Big|_{x=\ell} = 0, \qquad /81/$$

условиях на границе раздела двух сред

$$t_1\Big|_{x=h} = t_2\Big|_{x=h}\ ; \qquad /82/$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x}\bigg|_{x=h} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x}\bigg|_{x=h} \qquad /83/$$

и начальных условиях

$$t_1\big|_{\tau=0} = f_1(x); \qquad t_2\big|_{\tau=0} = f_2(x). \qquad /84/$$

Случай неоднородных граничных условий, так же как и в § 4, сводится к случаю однородных граничных условий /80-81/.

Переходя к изображениям по Лапласу в /78-84/, мы получим для $\bar{t}_1(x,p)$ и $\bar{t}_2(x,p)$ дифференциальные уравнения:

$$a_1 \frac{d^2\bar{t}_1}{dx^2} - p\bar{t}_1 = -f_1(x) - \bar{F}_1(x,p) = -\Phi_1(x,p); \qquad (0 \leqslant x \leqslant h); \qquad /85/$$

$$a_2 \frac{d^2\bar{t}_2}{dx^2} - p\bar{t}_2 = -f_2(x) - \bar{F}_2(x,p) = -\Phi_2(x,p); \qquad (h \leqslant x \leqslant \ell) \qquad /86/$$

и соответствующие граничные условия:

$$\lambda_1 \frac{d\bar{t}_1}{dx}\bigg|_{x=0} + \alpha_1 \bar{t}_1\big|_{x=0} = 0; \qquad /87/$$

$$\lambda_2 \frac{d\bar{t}_2}{dx}\bigg|_{x=\ell} + \alpha_2 \bar{t}_2\big|_{x=\ell} = 0; \qquad /88/$$

$$\bar{t}_1\big|_{x=h} = \bar{t}_2\big|_{x=h}; \qquad /89/$$

$$\lambda_1 \frac{d\bar{t}_1}{dx}\bigg|_{x=h} = \lambda_2 \frac{d\bar{t}_2}{dx}\bigg|_{x=h} \qquad /90/$$

Решение этой задачи /85-90/ мы будем искать в виде, аналогичном /68/. При $x < h$

$$\bar{t}_1(x,p) = \int_0^\ell \bar{R}_1(x,\xi,p)\,\bar{\Phi}(\xi,p)\,d\xi, \qquad /91/$$

где

$$\bar{R}_1(x,\xi,p)=\begin{cases}\bar{R}_{11}(x,\xi,p); & (0\leqslant\xi\leqslant x)\\ R_{11}^*(x,\xi,p); & (x\leqslant\xi\leqslant h);\\ \bar{R}_{12}(x,\xi,p); & (h\leqslant\xi\leqslant l)\end{cases}\qquad \bar{\Phi}(\xi,p)=\begin{cases}\bar{\Phi}_1(\xi,p); & (0\leqslant\xi\leqslant h)\\ \bar{\Phi}_2(\xi,p); & (h\leqslant\xi\leqslant l)\end{cases}\qquad /92/$$

и при $x>h$

$$\bar{t}_2(x,p)=\int_0^l \bar{R}_2(x,\xi,p)\bar{\Phi}(\xi,p)\,d\xi,\qquad /93/$$

где

$$\bar{R}_2(x,\xi,p)=\begin{cases}\bar{R}_{21}(x,\xi,p); & (0\leqslant\xi\leqslant h)\\ \bar{R}_{22}(x,\xi,p); & (h\leqslant\xi\leqslant x);\\ \bar{R}_{22}^*(x,\xi,p); & (x\leqslant\xi\leqslant l)\end{cases}\qquad \bar{\Phi}(\xi,p)=\begin{cases}\bar{\Phi}_1(\xi,p); & (0\leqslant\xi\leqslant h)\\ \bar{\Phi}_2(\xi,p); & (h\leqslant\xi\leqslant l).\end{cases}\qquad /94/$$

Подставив /91-94/ в дифференциальные уравнения /85-86/, мы получим для функций $\bar{R}$ шесть уравнений:

$$a_1\frac{\partial^2\bar{R}_{11}}{\partial x^2}-p\bar{R}_{11}=0; \qquad a_2\frac{\partial^2\bar{R}_{21}}{\partial x^2}-p\bar{R}_{21}=0;$$

$$a_1\frac{\partial^2\bar{R}_{11}^*}{\partial x^2}-p\bar{R}_{11}^*=0; \qquad a_2\frac{\partial^2\bar{R}_{22}}{\partial x^2}-p\bar{R}_{22}=0; \qquad /95/$$

$$a_1\frac{\partial^2\bar{R}_{12}}{\partial x^2}-p\bar{R}_{12}=0; \qquad a_2\frac{\partial^2\bar{R}_{22}^*}{\partial x^2}-p\bar{R}_{22}^*=0$$

и условия:

$$\bar{R}_{11}\Big|_{\xi=x} - \bar{R}_{11}^{*}\Big|_{\xi=x} = 0; \qquad \bar{R}_{22}\Big|_{\xi=x} - \bar{R}_{22}^{*}\Big|_{\xi=x} = 0;$$

$$\frac{\partial\bar{R}_{11}}{\partial x}\Big|_{\xi=x} - \frac{\partial\bar{R}_{11}^{*}}{\partial x}\Big|_{\xi=x} = -\frac{1}{a_1}; \qquad \frac{\partial\bar{R}_{22}'}{\partial x}\Big|_{\xi=x} - \frac{\partial\bar{R}_{22}^{*}}{\partial x}\Big|_{\xi=x} = -\frac{1}{a^2}. \qquad /96/$$

Подставив /91-94/ в /87-90/ , мы получим еще восемь условий для функции $\bar{R}$:

$$\lambda_1\frac{\partial\bar{R}_{11}^{*}}{\partial x} + \alpha_1\bar{R}_{11}^{*}\Big|_{x=0} = 0; \qquad \lambda_2\frac{\partial\bar{R}_{21}}{\partial x} + \alpha_2\bar{R}_{21}\Big|_{x=\ell} = 0;$$

$$\lambda_1\frac{\partial\bar{R}_{12}}{\partial x} + \alpha_1\bar{R}_{12}\Big|_{x=0} = 0; \qquad \lambda_2\frac{\partial\bar{R}_{22}}{\partial x} + \alpha_2\bar{R}_{22}\Big|_{x=\ell} = 0; \qquad /97/$$

$$\lambda_1\frac{\partial\bar{R}_{11}}{\partial x}\Big|_{x=h} = \lambda_2\frac{\partial\bar{R}_{21}}{\partial x}\Big|_{x=h}; \qquad \lambda_1\frac{\partial\bar{R}_{12}}{\partial x}\Big|_{x=h} = \lambda_2\frac{\partial\bar{R}_{22}^{*}}{\partial x}\Big|_{x=h};$$

$$\bar{R}_{11}\Big|_{x=h} = \bar{R}_{21}\Big|_{x=h}; \qquad \bar{R}_{12}\Big|_{x=h} = \bar{R}_{22}^{*}\Big|_{x=h}.$$

3416-150

Общие интегралы уравнений /95/ содержат двенадцать произвольных постоянных, которые можно определить, пользуясь последними двенадцатью условиями /96-97/. Найдя функцию Грина, мы получим по формулам /9I/ и /93/ решение нашей задачи в области изображений. После этого, переходя к оригиналам, получим окончательное решение задачи. Решение задачи теплопроводности для трехслойного тела (наиболее распространенная конструкция ТВЭЛ: горючее – прослойка – оболочка) производится аналогичным путем, но при этом количество постоянных, подлежащих определению, увеличивается. Для большого числа слоев лучше принять первый метод, который оказывается тем более точным, чем больше число слоев.

Р е з ю м е

Рассмотрена задача о распространении тепла в многослойном тепловыделяющем элементе (ТВЭЛ) для одномерного нестационарного температурного поля при наличии переменного источника тепла, являющегося функцией координат и времени, и конвективного теплообмена ТВЭЛ с теплоносителем переменной температуры.

Предложены два способа решения этой задачи. Первый способ заключается в том, что дифференциальные уравнения теплопроводности для многослойного ТВЭЛ заменяются одним дифференциальным уравнением с переменными теплообменными характеристиками (аппроксимация скачкообразного изменения теплофизических коэффициентов на границах соприкосновения отдельных слоев ТВЭЛ). Решение дифференциального уравнения с переменными теплообменными характеристиками получается при помощи соответствующего конечного интегрального преобразования, ядро которого находится операторным методом.

Второй способ основан на операционном исчислении. Для решения задачи предлагается вводить в области изображений по Лапласу некоторую обобщенную функцию Грина. Первый способ дает решение задачи в виде ряда, а второй - в интегральной форме, наиболее удобной для расчета при малых значениях критерия Фурье (пуск и остановка ядерного реактора).

Совокупность предложенных решений описывает перенос тепла в ТВЭЛ в самых разнообразных условиях эксплуатации ТВЭЛ (пуск реактора, процесс его регулирования, нормальный режим работы и случаи аварии). Поэтому полученные решения и предложенные методы решения задач теплопроводности представляют практический интерес для ядерной энергетики.